Petra Škrovánková

STOCHASTICKÝ TROJSTAVOVÝ MODEL ZDRAVOTNÉHO POISTENIA

Abstract: *The paper deals with the application of stochastic methods for modelling products of health insurance and medical insurance products. Multi-stage models have been used in mathematics since the end of 1960, and referred as the Markoff chains, although they were invented in the 18th century. Health care is one of the most important components of social insurance in every country. For this reason, the author deals with mathematical methods as one type of the instruments available for the determination of premium probability amount. Specifically, the three-stage model shows the mathematical apparatus of health security and a practical application of differential equations.*

Key words: *Markoff chains, transition probability, transition probability matrix.*

JEL: G 23

Úvod

Zdravie je nevyhnutná podmienka zaradenia sa do spoločnosti a dosiahnutia plnohodnotného života. Svetová zdravotná organizácia definuje zdravie nielen ako neprítomnosť choroby, ale aj ako stav fyzickej, psychickej a sociálnej pohody. V súčasnosti však čoraz viac našu kvalitu života ohrozujú mnohé civilizačné choroby bez ohľadu na vek.

V zdravotnom poistení rovnako ako v iných typoch poistenia je potrebné odhadnúť pravdepodobný priebeh škodovosti a na základe tohto odhadu stanoviť cenu poistenia. Spojité časové modely, ktoré už boli na Slovensku vytvorené, umožňujú vo všeobecnosti zohľadňovať široký okruh rôznych podmienok pri tvorbe ponuky produktov nemocenského poistenia a zdravotnej starostlivosti. V tejto oblasti je potrebné ďalej pokračovať rozšírením už existujúcich modelov.

Dopyt po ZS sa v posledných rokoch neúmerne zvyšuje. Dôvodom je jednak nárast populácie v strednej dĺžke života, ale taktiež finančná neobmedzenosť dostupnosti ZS.

Súčasný systém 100 % solidárnosti každému občanovi za nerovnaký príspevok poskytuje rovnakú starostlivosť. Zdravotné poisťovne zároveň pri jednotlivých poistencoch nezohľadňujú žiadne individuálne rizikové faktory. Z hľadiska výberu poistného je pritom rozdiel medzi ekonomicky aktívnym a neaktívnym poistencom citeľný. V roku 2006 bola vypracovaná stratégia reformy zdravotníctva, ktorá sa zaoberala aj zmenou financovania zdravotníctva v otázke výberu, prerozdeľovania a použitia i alokácie zdrojov. Jedným z rozhodujúcich nástrojov zvýšenia efektívnosti systému sa považuje zmena platobných mechanizmov a rozloženie rizika.

1 Markovove reťazce

Uvažujme množinu stavov S, ktorá má konečný počet prvkov $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Nech náhodný proces $X = \{X(t), t \in T\}$ je daný ako postupnosť náhodných premenných $X(t_i)$. Parametrom náhodného procesu X je čas t, ktorý budeme uvažovať v diskrétnych okamihoch $t_0, t_1, \ldots, t_m \ldots$. Predpokladajme, že každá náhodná premenná $X(t_i)$ môže nadobudnúť len konečný počet hodnôt z množiny stavov S. Pre zjednodušenie predpokladajme, že v každom okamihu $t = t_i$ zodpovedajúca náhodná premenná môže nadobudnúť jednu z hodnôt $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a že množina stavov S sa v čase nemení.

V spojitosti so systémovým modelovaním sa používa nasledujúca terminológia [3]. Náhodný proces X, ktorý sa môže nachádzať v stavoch S_j pre $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, uvažujme ako systém s prvkami . Potom namiesto toho, že náhodný proces X v okamihu t_i nadobudne hodnotu S_j budeme hovoriť, že systém S sa v okamihu t_i nachádza v stave S_j. Podobne namiesto v okamihoch $t_0, t_1, \ldots, t_m \ldots$ je zaužívané hovoriť o krokoch, resp. fázach systému S.

Označme symbolom $S_j^{(k)}$ udalosť, že systém S sa v kroku k nachádza v stave S_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Na začiatku procesu ($k$ = 0) je systém v stave $S_j^{(0)}$ pre $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Keďže v ďalších krokoch sa tento stav môže meniť, potom systém môžeme popísať pomocou podmienených pravdepodobností

$$P\left[S_j^{(k)} / S_j^{(k-1)}, \ldots S_j^{(1)}, S_j^{(0)}\right], \tag{1.1}$$

t. j. podmienených pravdepodobností toho, že systém sa v kroku k nachádza v stave S_j pre nejaké $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ za predpokladu, že v predchádzajúcom kroku k–1 sa nachádzal v stave S_j pre nejaké $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ atď. až v kroku 0 sa nachádza v stave S_j pre nejaké $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Treba si uvedomiť, že stavy S_j v jednotlivých krokoch môžu byť rovnaké alebo rôzne. Z hľadiska kombinatoriky môžme vytvoriť n^{k+1} variácií, resp. n^{k+1} (k+i)-tíc. Stav systému v určitom kroku je teda podmienený stavmi systému v predchádzajúcich krokoch. V takomto prípade hovoríme, že systém má (k–i)-násobnú väzbu.

Procesy s jednoduchou väzbou prebiehajúce v diskrétnych časových okamihoch (krokoch) sa nazývajú *Markovove reťazce* [6]. Ak množina stavov S je konečná, ide o *konečný Markovov reťazec*, ak je nekonečná spočítateľná hovoríme *o nekonečnom Markovovom reťazci.*

Pre Markovov reťazec teda platí:

$$P\left[S_j^{(k)} / S_j^{(k-1)}, \dots S_j^{(1)}, S_j^{(0)}\right] = P\left[S_j^{(k)} / S_j^{(k-1)}\right]. \tag{1.2}$$

Ak ľubovolný náhodný proces má vlastnosť (1.2), tak hovoríme, že má *markovovskú vlastnosť*. Označme túto pravdepodobnosť $p_{ij}(k)$:

$$p_{ij}(k) = P\left[S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)}\right] \tag{1.2.1}$$

Na popis Markovovho reťazca sú teda postačujúce podmienené pravdepodobnosti toho, že systém v kroku k sa nachádza v stave S_j, za predpokladu, že v predchádzajúcom kroku k–1 sa nachádzal v stave S_i.

Pravdepodobnosti $p_{ij}(k)$ nazývame pravdepodobnosti prechodu systému zo stavu i do stavu j. Vo všeobecnosti závisia od východiskového kroku k–1 (východiskového okamihu t_{k-1}) a od rozdielu $t_k - t_{k-1}$ (dobe medzi dvoma nasledujúcimi krokmi, resp. okamihmi).

Ak pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(k)$ nezávisia od počiatočného kroku k–1, ale závisia len od doby medzi dvoma po sebe idúcimi krokmi t_k a t_{k-1}, hovoríme o *homogénnom Markovovom reťazci*. Rozdiel $t_k - t_{k-1}$ nazveme dĺžkou k-teho kroku v Markovovom reťazci. Môžeme predpokladať, že dĺžka každého kroku je rovnaká (čo v praxi nie je problém), teda

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = const, k = 1, 2, \dots$$

Potom pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(k)$ v homogénnom Markovovom reťazci môžeme označovať jednoducho p_{ij}.

2 Matica pravdepodobností prechodu

V konečnom Markovovom reťazci s počtom stavov n môžeme pravdepodobnosti prechodu p_{ij} usporiadať do matice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Maticu $\mathbf{P}$ nazývame maticou prechodu (maticou pravdepodobností prechodu), pričom pre pravdepodobnosti prechodu p_{ij} platí:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.1.1}$$

Maticu, ktorej prvky vyhovujú vyššie uvedeným podmienkam, nazývame stochastickou. Matica prechodu je teda stochastickou maticou. Prvky matice mimo diagonály, t. j. p_{ij} pre $i \neq j$, predstavujú pravdepodobnosti prechodu systému zo stavu i do stavu j a diagonálne prvky, t. j. p_{ij} pre $i = j$, predstavujú pravdepodobnosti toho, že systém ostal v stave, v akom sa nachádzal v predchádzajúcom kroku.

Už vieme, že systém S sa môže nachádzať v jednom zo stavov $S_1, S_2, \dots, S_n$, do ktorého sa dostane s pravdepodobnosťou p_{ij} . Reťazec bude určený, ak nájdeme vzťah, pomocou ktorého budeme vedieť určiť pravdepodobnosť výskytu ľubovoľnej postupnosti stavov systému $\left\{S_j^{(l)}\right\}_{l=0}^{k}$ pre postupnosť časových okamihov $t_0, t_1, \dots, t_k$. Označme $p_j(k)$ pravdepodobnosť toho, že systém sa po krokoch k nachádza v stave S_j, $j = 1,2,\dots,n$. Potom môžeme systém S popísať n-ticou pravdepodobností

$$p(k) = \left(p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)\right) \tag{2.2}$$

Teda n-rozmerný vektor s prvkami $p_j(k)$ pre $j = 1,2,\dots,n$ a $k \in \{1,2,\dots\}$ predstavuje rozdelenie pravdepodobnosti systému S.

Pre $k=0$, teda na začiatku procesu pravdepodobnosti $p_j(0)$, $j = 1,2,\dots,n$ vytvárajú vektor počiatočných pravdepodobností

$$p(0) = \left(p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)\right), \tag{2.2.1}$$

kde $p_j(0) = 1$ v prípade, že systém S je v stave S_j pre $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Z vlastnosti (2.1.1) to znamená, že vektor počiatočných pravdepodobností má na j-tom mieste jednotku a ostatné prvky sú nulové.

Ďalej nás bude zaujímať rozdelenie pravdepodobností $p(k)$. Určíme najskôr rozdelenie pravdepodobností po jednom kroku. Keďže ide o Markovov proces, jednotlivé pravdepodobnosti $p_j(1)$ pre $j = 1,2,\dots,n$ závisia od predchádzajúceho stavu, v ktorom sa systém nachádzal (teda od počiatočného).
Podľa (1.2.1)

$$p_{ij}(1) = P\left[S_j^{(1)} / S_i^{(0)}\right].$$

Pretože stavy S_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ vytvárajú úplný systém stavov, podľa vety o úplnej pravdepodobnosti[1] máme:

$$p_j(1) = p_1(0)p_{1j} + p_2(0)p_{2j} + \dots + p_n(0)p_{nj} = \sum_{i=1}^{n} p_j(0)p_{ij}. \tag{2.3}$$

Podľa (2.3) dostaneme j-tu zložku vektora pravdepodobností $p(1)$ tak, že i-tu zložku vektora $p(0)$ násobíme prvkom nachádzajúcim sa v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice **P** a takto vzniknuté súčiny sčítame.

[1] Z teórie pravdepodobnosti bližšie v [2].

Môžeme teda písať

$$p(1) = p(0)\,\mathbf{P}. \tag{2.4}$$

Určíme teraz rozdelenie pravdepodobností po dvoch krokoch, teda vektor $p(2)$. Opäť pomocou vzťahu (1.2.1) dostaneme:

$$p_{ij}(2) = P\left[S_j^{(2)} / S_i^{(1)}\right].$$

Použijeme analogický spôsob s tým, že za vektor počiatočných pravdepodobností zoberieme vektor $p(1)$. Pre j-tu zložku máme:

$$p_j(2) = p_1(1)p_{1j} + p_2(1)p_{2j} + \ldots + p_n(1)p_{nj} = \sum_{i=1}^{n} p_j(1)p_{ij}.$$

Podľa (2.4) dostaneme:

$$p(2) = p(1)\,\mathbf{P} = p(0)\,\mathbf{P}^2. \tag{2.5}$$

Metódou matematickej indukcie sa dá dokázať, že pre vektor pravdepodobností $p(n)$ po n krokoch platí:

$$p(n) = p(n-1)\,\mathbf{P} = p(0)\,\mathbf{P}^n. \tag{2.6}$$

Na prácu s homogénnym Markovovým reťazcom potrebujeme teda poznať vektor počiatočných pravdepodobností $p(0)$ a maticu prechodu $\mathbf{P}$.

Pomocou vzťahu (2.6) môžeme vyšetriť, či v uvažovanom systéme existuje limitné rozdelenie pravdepodobností alebo stacionárne rozdelenie, teda také, ktoré sa už s rastúcim n nemení.

Predpokladajme, že existujú také pravdepodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (toho, že systém sa bude nachádzať v stave $S_1, S_2, \ldots, S_m$), ktoré už nie sú závislé od počtu krokov n. Tieto pravdepodobnosti vytvárajú vektor stacionárnych pravdepodobností

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \text{ pričom } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Ak existuje limitné rozdelenie pravdepodobností $p_i(n)$, tak musí platiť:

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = p \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} p(n-1) = p.$$

Zo vzťahu (2.6) dostaneme:

$$p = p\,\mathbf{P}$$

alebo, po ekvivalentných úpravách

$$p[\mathbf{E} - \mathbf{P}] = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matica m-teho rádu a $\mathbf{0}$ je m-rozmerný nulový vektor.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

Ak det $[\mathbf{E}-\mathbf{P}]=0$, potom tento systém homogénnych lineárnych rovníc je riešiteľný.[2] Táto podmienka je pre maticu prechodu splnená. Takže náš systém má nekonečne veľa riešení, z ktorých vyberieme to, pre ktoré platí:

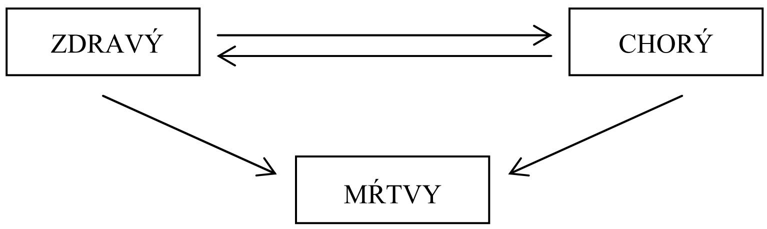
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Príkladom stacionárneho rozdelenia pravdepodobností je vektor, ktorý má na i-tom mieste jednotku a inde nulu, t. j. stav S_i je nenávratný.
Poznámka: Stacionárne rozdelenie pravdepodobností a vektor počiatočných pravdepodobností $p(0)$ má teda rovnaký tvar, t. j. jednotku na i-tom mieste, avšak pre rôzne stavy S_i.

3 Matica pravdepodobností prechodu pre trojstavový model

Na účely zdravotného (nemocenského) poistenia sú využiteľné konečné homogénne Markovove reťazce. Táto skutočnosť znamená, že pravdepodobnosť poistného plnenia závisí len od dĺžky poistného obdobia.

Uvažujeme trojstavový model so stavmi S_1–zdravý, S_2–chorý, S_3–mŕtvy znázornený diagramom [5]:



Množina stavov S je trojprvková so stavmi S_1, S_2, S_3.

Poistenec predstavuje systém, ktorý sa môže nachádzať v jednom z troch uvažovaných stavov.

Vektor $p(n) = \left(p_1(n), p_2(n), p_3(n)\right)$ popisuje pravdepodobnosť toho, v akom stave sa poistenec nachádza po n krokoch (obdobiach). Za jedno obdobie môžeme uvažovať jeden rok. Prvá zložka teda vyjadruje pravdepodobnosť toho, že poistenec bude po n rokoch zdravý, druhá zložka pravdepodobnosť toho, že bude po n rokoch chorý a tretia, že poistenec po n rokoch umrie.

V trojstavovom modeli má matica pravdepodobností prechodu tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

[2] Z lineárnej algebry známe Cramerovo pravidlo.

a vektor počiatočných pravdepodobností $p(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, keďže každá novo poistená osoba je v stave S_1, teda zdravá. Z diagramu vidíme, že šípky k stavu mŕtvy sú iba jedným smerom. Ak neuvažujeme klinickú smrť, je zrejmé, že zo stavu S_3 sa poistenec nevráti. Pravdepodobnosti prechodu p_{3i} sú nulové pre $i < 3$ a pravdepodobnosť p_{33}=1. Stav S_3 nazývame absorpčný.

Pre poisťovňu je dôležité vedieť, aké sú pravdepodobnosti toho, v akom stave bude poistenec po n obdobiach.

Určíme vektor pravdepodobností $p(1)$ a $p(2)$ podľa (2.4) a (2.5)

$$p(1) = p(0)\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Rozdelenie pravdepodobností po jednom roku sa teda rovná prvému riadku matice prechodu **P**.

$$p(2) = p(1)\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \tag{3.3}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \end{pmatrix}$$

Po dvoch rokoch sú jednotlivé zložky vektora pravdepodobností tvorené zo súčtov pravdepodobností prechodu cez všetky stavy, v ktorých sa môže poistenec nachádzať medzi prvým a druhým rokom.

Vzhľadom na absorpčný stav S_3 ($p_{31} = p_{32} = 0$ a $p_{33} = 1$) posledný riadok matice prechodu je rovný vektoru (0 0 1).

Teda

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

a

$$p(2) = \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Po dostatočne veľkom počte rokov sa všetky osoby budú nachádzať v stave mŕtvy a z tohto stavu sa už do iného stavu nedostanú. Takže pre prípad zdravotného poistenia je evidentné, že vektor stacionárnych pravdepodobností p bude p=(0, 0, 1).

4 Tvorba matice pravdepodobností prechodu

Tvar matice pravdepodobností prechodu pre zdravotné (nemocenské) poistenie sme odvodili v predchádzajúcej kapitole. Pre praktickú aplikáciu ostáva vypočítať jednotlivé jej zložky, teda pravdepodobnosti prechodu p_{ij}. Použijeme teóriu diferenciálnych rovníc, ktorých tvorba pre jednotlivé pravdepodobnosti prechodu je podľa [5].

Diferenciálne rovnice pre pravdepodobnosti prechodu p_{11}, p_{12}, p_{13}, v trojstavovom modeli sú:

$$\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{11} = -\,{}_t p_x^{11}\left(\sigma_{x+t} + \mu_{x+t}\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{12} = {}_t p_x^{11}\,\sigma_{x+t} \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{13} = {}_t p_x^{11}\,\mu_{x+t} \tag{4.3}$$

V modeli platia predpoklady, že v jednom období nedôjde k dvom prechodom. To znamená, že do stavu mŕtvy sa poistený môže dostať len z východiskového stavu, v našom prípade teda len zo stavu zdravý.

${}_t p_x^{ij}$ – pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do stavu j po čase t osoby vo veku x.

σ_x – intenzita prechodu zo stavu zdravý do stavu chorý (poskytnutá zdravotná starostlivosť),

μ_x – intenzita prechodu zo stavu zdravý do stavu mŕtvy.

Tieto intenzity dostaneme takto:

- maximálne vierohodným odhadom σ_x je podiel počtu ochorení a počtu poistených, ktorý označíme $\tilde{\sigma}_x$ [4],
- maximálne vierohodným odhadom μ_x je podiel počtu úmrtí zdravých a počtu poistených, ktorý označíme $\tilde{\mu}_x$.

Riešenie týchto rovníc je nasledujúce:

$${}_t p_x^{11} = e^{-\left(\tilde{\sigma}_{x+t}+\tilde{\mu}_{x+t}\right)t} \tag{4.4}$$

$${}_t p_x^{12} = \frac{\tilde{\sigma}_{x+t}}{\tilde{\sigma}_{x+t}+\tilde{\mu}_{x+t}}\left[1-e^{-\left(\tilde{\sigma}_{x+t}+\tilde{\mu}_{x+t}\right)t}\right] \tag{4.5}$$

$${}_t p_x^{13} = \frac{\tilde{\mu}_{x+t}}{\tilde{\sigma}_{x+t}+\tilde{\mu}_{x+t}}\left[1-e^{-\left(\tilde{\sigma}_{x+t}+\tilde{\mu}_{x+t}\right)t}\right] \tag{4.6}$$

Diferenciálne rovnice pre pravdepodobnosti prechodu p_{21}, p_{22}, p_{23} v trojstavovom modeli sú:

$$\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{21} = {}_t p_x^{22}\,\delta_{x+t} \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{22} = -\,{}_t p_x^{22}\left(\delta_{x+t} + \tau_{x+t}\right) \tag{4.8}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{23} = {}_t p_x^{22}\,\tau_{x+t} \tag{4.9}$$

V modeli platia predpoklady, že v jednom období nedôjde k dvom prechodom.

${}_t p_x^{ij}$ – pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do stavu j po čase t osoby vo veku x,

δ_x – intenzita prechodu zo stavu chorý do stavu zdravý,

τ_x – intenzita prechodu zo stavu chorý do stavu mŕtvy.

Tieto intenzity dostaneme takto:

− maximálne vierohodným odhadom δ_x je podiel počtu vyliečených a počtu poistených, ktorý označíme $\tilde{\delta}_x$,

− maximálne vierohodným odhadom τ_x je podiel počtu úmrtí chorých a počtu poistených, ktorý označíme $\tilde{\tau}_x$.

Riešenie týchto rovníc je nasledujúce:

$${}_t p_x^{21} = \frac{\tilde{\delta}_{x+t}}{\tilde{\delta}_{x+t} + \tilde{\tau}_{x+t}}\left[1 - e^{-\left(\tilde{\delta}_{x+t} + \tilde{\tau}_{x+t}\right)t}\right] \tag{4.10}$$

$${}_t p_x^{22} = e^{-\left(\tilde{\delta}_{x+t} + \tilde{\tau}_{x+t}\right)t} \tag{4.11}$$

$${}_t p_x^{23} = \frac{\tilde{\tau}_{x+t}}{\tilde{\delta}_{x+t} + \tilde{\tau}_{x+t}}\left[1 - e^{-\left(\tilde{\delta}_{x+t} + \tilde{\tau}_{x+t}\right)t}\right] \tag{4.12}$$

Keďže pracujeme s homogénnym Markovovým reťazcom, uvažujeme, že jednotlivé pravdepodobnosti budú závisieť iba od času t, ktoré zvolíme pevné. To znamená, že matica pravdepodobnosti prechodu bude rovnaká pre všetky vekové kategórie.

Pri zbieraní údajov o počtoch poistencov, ktoré budeme potrebovať na jednotlivé odhady intenzít, môžeme si pomôcť zavedením predpokladu, že všetci poistenci budú vždy na začiatku sledovaného obdobia v stave zdravý, ktorý špecifikujeme ako „v sledovanom období nebola poistenému poskytnutá zdravotná starostlivosť". Do stavu chorý, resp. „v sledovanom období bola poistenému poskytnutá zdravotná starostlivosť", by sa dostal každý, ktorému sa v danom období poskytla sledovaná zdravotná starostlivosť. Každý poistený je teda rovnocenný, bez ohľadu na to, či v predchádzajúcom období čerpal poistnú náhradu, alebo nie. Takže najvhodnejší by bol model pracujúci s jedným obdobím ($t=1$, t. j. jeden rok). Keďže poisťovňa má dostatočne veľký poistný kmeň, môžeme predpokladať, že úmrtnosť poistencov bude zodpovedať štandardnej úmrtnosti. Chýbajúce údaje môžeme nahradiť údajmi z úmrtnostných tabuliek bez väčšieho rizika skreslenia.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

Na zjednodušenie situácie použijeme fiktívne početnosti o stave poistencov zdravotnej poisťovne X s poistným kmeňom 100 000 osôb.

Uvažujeme nasledujúce odhady intenzít:

$$\tilde{\sigma}_{x+1} = \frac{842}{100\,000} = 0{,}00842,$$

$$\tilde{\mu}_{x+1} = \frac{1588}{100\,000} = 0{,}01588,$$

$$\tilde{\delta}_{x+1} = \frac{372}{100\,000} = 0{,}00372,$$

$$\tilde{\tau}_{x+1} = \frac{428}{100\,000} = 0{,}00428.$$

Teraz vypočítame jednotlivé pravdepodobnosti prechodu pomocou vzťahov (4.4) až (4.6) a vzťahov (4.10) až (4.12) pre $t = 1$(jedno obdobie) a dosadíme do matice (3.4).

Dostaneme:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}976 & 0{,}0083 & 0{,}0157 \\ 0{,}0037 & 0{,}992 & 0{,}0043 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomocou matice **P** a vektora počiatočných pravdepodobností môžeme určiť rozdelenie pravdepodobností po n obdobiach (rokoch). Teda s akou pravdepodobnosťou sa bude poistenec nachádzať v stavoch S_1, S_2, S_3 po n obdobiach.

Vypočítame postupne rozdelenie pravdepodobností po 1, 5 a 10 rokoch x-ročnej osoby, ktorá má záujem o zdravotné poistenie.

Pre $n = 1$ pomocou vzťahu (2.4) dostaneme:

$$p(1) = p(0)\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}976 & 0{,}0083 & 0{,}0157 \\ 0{,}0037 & 0{,}992 & 0{,}0043 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}976 & 0{,}0083 & 0{,}0157 \end{pmatrix}$$

Interpretácia:

Pravdepodobnosť toho, že osoba ostane zdravá je 0,976, že ochorie je 0,0083 a že zomrie je 0,015 za predpokladu, že je v súčasnosti zdravá.

Pre $n = 5$ pomocou vzťahu (2.6) dostaneme:

$$p(5) = p(0)\mathrm{P}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8859 & 0{,}0389 & 0{,}0752 \\ 0{,}0173 & 0{,}961 & 0{,}0217 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8859 & 0{,}0389 & 0{,}0752 \end{pmatrix}$$

Interpretácia:
Pravdepodobnosť toho, že osoba ostane zdravá po piatich rokoch je 0,8859, že ochorie je 0,0389 a že zomrie je 0,0752 za predpokladu, že je v súčasnosti zdravá.
Pre $n=10$ pomocou vzťahu (2.6) dostaneme:

$$p(10)=p(0)\mathrm{P}^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,7855 & 0,0719 & 0,1426\\ 0,032 & 0,9241 & 0,0439\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,7855 & 0,0719 & 0,1426\end{pmatrix}$$

Interpretácia:
Pravdepodobnosť toho, že osoba ostane zdravá po desiatich rokoch je 0,7855, že ochorie je 0,0719 a že zomrie je 0,1426 za predpokladu, že je v súčasnosti zdravá.

Rovnako môžeme postupovať v prípade, že osoba je v súčasnosti chorá. Táto situácia nastáva už pri poistenej osobe, keď poisťovňu zaujíma najmä pravdepodobnosť toho, že osoba vyzdravie. Vektor počiatočných pravdepodobností má tvar $p(0)=(0\ 1\ 0)$. Jednotlivé rozdelenia pravdepodobnosti $p(n)$ po 1, 5 a 10 rokoch sú druhé riadky matíc P, P^5 a P^{10}.

Výsledky obidvoch situácií sú v tabuľke č. 1. Pravdepodobnosť zdravia u zdravého človeka časom (každých 5 rokov) klesá úmerne v priemere o 10 %. Naopak, rastie pravdepodobnosť toho, že ochorie a taktiež narastá pravdepodobnosť toho, že na dané ochorenie umrie. Táto pravdepodobnosť po desiatich rokoch je takmer dvakrát vyššia ako pri pravdepodobnosti choroby. U chorého človeka tiež narastá pravdepodobnosť toho, že vyzdravie. Pravdepodobnosť, že ostane chorý, sa znižuje pomaly, stále je však viac ako 90 %. Pravdepodobnosť, že na danú chorobu umrie, rastie približne o 2 %.

Tab. č. 1

Pravdepodobnosti prechodu do určitého stavu

p(0)	**zdravý**	**chorý**	**zdravý**	**chorý**	**zdravý**	**chorý**
Stav	*zdravý*		*chorý*		*mŕtvy*	
po 1 roku	0,976	0,0037	0,0083	0,992	0,0157	0,0043
po 5 rokoch	0,8859	0,0173	0,0389	0,961	0,0217	0,0217
po 10 rokoch	0,7855	0,032	0,0719	0,9241	0,1426	0,0439

Prameň: výstupy z Microsoft Office Excel 2003.

Záver

Cieľom príspevku bolo poukázať na stochastický prístup pri modelovaní produktov zdravotného, ale aj nemocenského poistenia. Tento prístup sa začína používať pri uvažovaní náhodných vplyvov na danú udalosť, čo je charakteristické pre udalosť, ktorou je choroba. Daný stochastický model bol založený na teórii homogénnych Markovových reťazcov. Pomocou matice pravdepodobností prechodu pre trojstavový model zdravotného poistenia je výpočet pravdepodobnosti výskytu sledovanej choroby u osôb všetkých vekových kategórií pomerne jednoduchý. Pri výpočtoch som použila aj teóriu diferenciálnych rovníc. Spôsob použitia diferenciálnych rovníc v tejto oblasti bol už dobre rozpracovaný v mnohých vyspelých krajinách (USA, Veľká Británia, Švédsko, Nemecko) a ich matematické modely sú známe a publikované [4].

Literatúra

[1] BOOTH, P. – CHADBURN, R. – HABERMAN, S.: *Modern Actuarial Theory and Practice*. London: Chapman and Hall, 2004.
[2] LAMOŠ, F. – POTOCKÝ, R.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998.
[3] NORRIS, J. R.: *Markov chains*. Cambridge: University Press, 1997.
[4] PITACCO, E.: *Disability risk models; towards a unifying approach*. Universita di Trieste, 1993.
[5] ŠKROVÁNKOVÁ, L.: *Aktuárske metódy v dôchodkovom a nemocenskom poistení*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2004.
[6] UNČOVSKÝ, L. – ČEMICKÁ, K.: *Stochastické procesy a modely*. Bratislava: ES VŠE, 1992.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009