Arnold Dávid
František Peller

EKONOMICKÉ TVRDENIA A DIFERENCIÁLNY POČET

Abstract: *The aim of this article is to describe a mathematical character of some economic statements, in particular to explain how to prove these statements by means of differential calculus. The statements relate to marginal analysis of basic economic functions, e.g. profit, costs, production, income, etc.*

Key words: *economy, mathematics, price, revenue, profit, optimalisation, elasticity.*

JEL: C 2, D 1, D 2, D 4

Úvod

Vývoj ekonomiky prináša potrebu exaktnej matematickej analýzy jej vnútorných väzieb a teda spätne vyplýva i na rozvoj matematiky a jej aplikačných možností. Špecifikom matematiky je, že pri skúmaní objektívnej reality abstrahuje a odhliada od všetkého, čo sa vzťahuje na najvšeobecnejšie stránky reálneho sveta, t. j. od všetkého, čo sa nevzťahuje na jeho kvantitatívne a priestorove formy a vzťahy.

Matematická reč je exaktná a jednoznačná, narába s číslami, symbolmi, logickými operátormi. Čísla samotné ešte netvoria matematiku. Matematiku tvoria vzťahy medzi veličinami, ktoré sú vyjadriteľné číslami a vzorcami. Spočiatku sa tento prístup uplatnil najmä v technických a prírodných vedách.

Prenikanie matematiky do ekonómie je objektívny proces, ktorý má svoj začiatok pomerne presne určený dosiahnutou úrovňou poznania kvality ekonomických procesov a javov. Vytvorenie uceleného teoreticko-ekonomického systému je východiskom pre kvantitatívne skúmanie, začiatkom procesu prenikania matematických metód do ekonómie.

V prírode platia určité zákony a tvrdenia ako odraz objektívnej reality, s ktorými súhlasíme všetci. Napríklad Archimedov zákon, gravitačný zákon alebo Pytagorova veta. Ignorovanie Archimedovho zákona (pri kúpaní sa v mori) alebo gravitačného zákona (pri skokoch na lyžiach) sa prejaví bezprostredne (často s trvalými následkami). Pytagorovu vetu môžeme ignorovať, pretože nie je prírodný zákon (ale napriek tomu stále platí). Dôkazov Pytagorovej vety je viacero: od grafických náčrtov až po Euklidove vety.

Podobne je to aj s ekonomickými zákonmi. Môžeme ich ignorovať (napríklad v politike), ale stále platia. Samozrejme iba pri určitých podmienkach (matematici ich nazývajú predpoklady). Ekonomické zákony sa na rozdiel od gravitačného zákona neprejavujú okamžite, ale až po určitom čase (obvykle príliš neskoro). Preto je úlohou ekonómov poznať a pripraviť podmienky, ktoré umožňujú, aby sa určitý ekonomický zákon prejavil.

Overenie ekonomických tvrdení pomocou diferenciálneho počtu

V ďalšom texte uvedieme známe ekonomické tvrdenia a dokážeme ich platnosť pomocou diferenciálneho počtu. Naším cieľom je ukázať, že s definovanými premisami operujúca ekonomická matematika je elegantný a efektívny nástroj, ktorý má prevahu nad verbálnym postupom. Pri „hrubej" verbálnej formulácii a analýze ekonomických zákonitostí nie je zrejmá potreba starostlivej previerky všetkých použitých predpokladov, hoci táto je v zmysle vedeckej čestnosti bezpodmienečne nevyhnutná. Prenosnosť teoreticky nájdených zákonov na ekonomickú realitu závisí v rozhodujúcej miere od toho, ako dobre sa použité prepoklady v konkrétnom prípade zhodujú alebo nie.

Najskôr zavedieme označenia pre tie pojmy, s ktorými budeme v ďalšom pracovať.

Zameriame sa na analýzu peňažných obratov jednej firmy, ktorá vyrába iba jeden druh tovaru (resp. poskytuje iba jeden druh služby) a predáva ho na spoločnom trhu.

x je produkcia (počet výrobkov) jedného tovaru,
$p(x)$ je funkcia jeho ceny na spoločnom trhu,
$C(x)$ je funkcia nákladov, potrebných na jeho výrobu,
$R(x)$ je funkcia tržby z predaja tohoto tovaru,
$P(x)$ je zisk firmy pred zdanením.

Hraničná funkcia

Hraničná funkcia (marginálna funkcia) k danej funkcii je vzťah, ktorý určuje, ako sa zmení hodnota danej funkcie, ak sa jej argument zmení o jednu. Napríklad, ako sa zvýšia celkové náklady, ak budeme vyrábať o jeden výrobok viac. Hraničné náklady sú vlastne dodatočné náklady vynaložené na posledný výrobok. Ak sú menšie ako cena toho výrobku, má zmysel výrobu zvyšovať (pokiaľ to dovoľujú výrobné kapacity). Ak sú väčšie, treba výrobu znížiť. Takto sa produkcia ustáli na takej optimálnej hodnote, pri ktorej sú hraničné náklady (približne) rovné cene jedného výrobku.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

Ak ostaneme iba pri slovnej formulácii, nevieme riešiť predchádzajúcu úlohu pri monopolnom trhu, keď cena výrobku závisí od dopytu po ňom. Vtedy prichádza na pomoc matematika, ktorá ale pracuje s presnými pojmami. Najprv treba upresniť pojem hraničnej funkcie.

Definícia 1. Hraničná (marginálna) funkcia k danej diferencovateľnej funkcii f(x) je jej derivácia f ′(x).

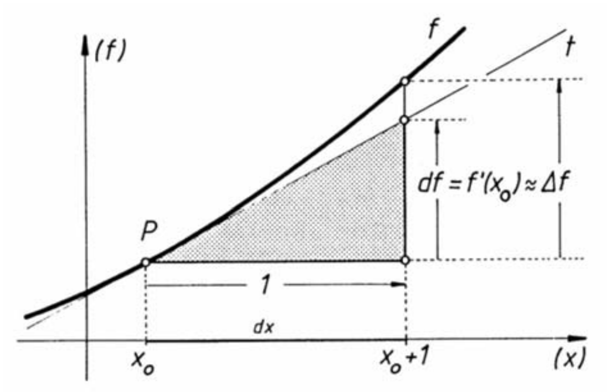
Definície sa nedokazujú. Treba ale ukázať, že sú užitočné pri aplikáciach.

Platí $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Pri veľkom počte výrobkov je prírastok jedného výrobku Δx dostatočne malý na to, aby sa hraničná funkcia dobre zhodovala s deriváciou funkcie.

Potom je prírastok Δf (približne) rovný hodnote derivácie funkci f podľa x v bode x.

Obr. č. 1



Ďalej budeme aplikovať poznatky z diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej pri dôkazoch niektorých ekonomických tvrdení.

Tvrdenie 1. Hraničný príjem monopolného podniku vyrábajúceho jeden tovar je vždy menší ako cena tohto tovaru.

Dôkaz. Funkcia odbytovej ceny $p = p(x)$ je v monopole klesajúca, t. j. $p'(x) < 0$.
Zo vzťahu $R(x) = x.p(x)$ sa dostane podľa pravidla derivácie súčinu hraničný príjem v tvare (*) $R'(x) = p(x) + x.p'(x)$. Pretože platí $x > 0$, $p'(x) < 0$, je druhý člen na pravej strane (*) záporný a teda nevyhnutne platí $R'(x) < p(x)$. Koniec dôkazu.

Tvrdenie 2. Hraničný príjem polypolného podniku vyrábajúceho jeden tovar je vždy rovný cene tohoto tovaru.

Dôkaz. Funkcia odbytovej ceny $p = p(x)$ je v polypole konštantná, takže $p'(x) = 0$.
Zo vzťahu (*) nasleduje $R'(x) = p$. Koniec dôkazu.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

Tvrdenie 3. V minime jednotkových nákladov („prevádzkovom optime") sú hraničné náklady a jednotkové náklady rovnaké.

Dôkaz. Je daná diferencovateľná funkcia nákladov $C = C(x)$. Jej funkcia jednotkových nákladov $\overline{C}(x) := C(x)/x$ pre $x > 0$ je takisto diferencovateľná a vnútri intervalu výrobnej kapacity nadobúda lokálne minimum (porovnaj obr. č. 2). (Tvrdenie 3 nie je platné v prípade lineárnej funkcie nákladov, pretože vtedy je funkcia jednotkových nákladov konštantná.)

V minime jednotkových nákladov x_o ($x_o > 0$) musí byť nutne prvá derivácia funkcie jednotkových nákladov rovná nule, t. j. musí platiť $\overline{C}\,'(x_o) = 0$.

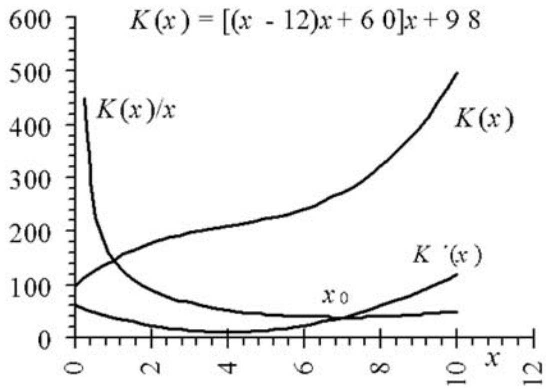
Pretože je $\overline{C}\,(x) := C(x)/x$ je podľa pravidla derivácie podielu v bode x_o:

$$0 = \overline{C}\,'(x) = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{C(x)}{x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{C\,'(x).x - C(x)}{x^2}.$$ Vynásobením $x^2 > 0$ dostaneme

$0 = C\,'(x).x - C(x)$ a preto je v bode x_o $C(x) = C\,'(x).x \Leftrightarrow \frac{C(x)}{x} = C\,'(x)$,

t. j. $\overline{C}\,(x) = C'(x)$ v prevádzkovom optime. Koniec dôkazu.

Obr. č. 2



Tvrdenie 4. V prevádzkovom minime sú hraničné náklady a priemerné variabilné náklady rovnaké.

Tvrdenia 3 a 4 sú zvláštne prípady všeobecne platnej vety:

Veta 1. V lokálnych extrémoch x (≠ 0) diferencovateľnej priemernej funkcie $\overline{f}(x) := f(x)/x$ sú hodnoty priemernej funkcie $\overline{f}(x)$ a hraničnej funkcie $f\,'(x)$ rovnaké.

Dôkaz. V lokálnom extréme x funkcie $\overline{f}(x)$ musí platiť $\overline{f}\,'(x) = 0$. Podľa pravidla derivácie podielu platí pre funkciu $\overline{f}(x) = f(x)/x$

$$0 = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x).x - f(x)}{x^2} \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x).x = f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} = \overline{f}(x)$$

Koniec dôkazu.

Nasledujúce výroky opisujú súvis medzi extrémami a príslušnými koeficientmi elasticity:

Tvrdenie 5. V prevádzkovom optime sú celkové náklady vyrovnane elastické vzhľadom na výstupy.
Dôkaz. Použijú sa tie isté predpoklady ako vo vete 1. Elasticita výstupu nákladov je daná vzorcom

$$(**) \quad \varepsilon_{C,x} = \frac{C'(x)}{C(x)}.x = \frac{C'(x)}{\frac{C(x)}{x}} = \frac{C'(x)}{\overline{C}(x)}$$

Podľa tvrdenia 3 platí v prevádzkovom optime rovnosť $C'(x) = \overline{C}(x)$. Ak toto dosadíme do (**), dostaneme v prevádzkovom optime rovnosť $\varepsilon_{C,x} = 1$.
Koniec dôkazu.

Tvrdenie 6. V prevádzkovom minime sú variabilné náklady vyrovnane elastické vzhľadom na výstupy.
Dôkaz. Pretože platí $C_v'(x) = C'(x)$, ako aj tvrdenie 4, dostane sa tvrdenie 6 z (**), t. j. $\varepsilon_{Cv,x} = 1$ v prevádzkovom minime. Koniec dôkazu.

Tvrdenia 5 a 6 značia, že v prevádzkovom optime (resp. minime) spôsobuje zvýšenie produkcie o 1 % takisto 1 % nárast celkových nákladov (resp. nárast variabilných nákladov).

Vzorec (**) opisuje zvláštne ekonomické prípady všeobecnej súvislosti:

Veta 2. V lokálnych extrémoch x (≠ 0) diferencovateľnej priemernej funkcie $\overline{f}(x)$ *(:= f(x)/x) má elasticita* $\varepsilon_{f,x}$ *funkcie f vzhľadom na x hodnotu 1.*

Dôkaz. Podľa (1) platí $\varepsilon_{f,x} = \frac{f'(x)}{f(x)}.x = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}$

V lokálnych extrémoch x funkcie $\overline{f}$ platí rovnosť $f'(x) = \overline{f}(x)$ a súčasne platí $\varepsilon_{f,x} = 1$. Koniec dôkazu.

Špeciálny prípad vety 2 znie:

Tvrdenie 7. Pre ten faktorový vstup r, pre ktorý je priemerný výnos x(r)/r maximálny, má elasticita $\varepsilon_{x,r}$ *výstupu vzhľadom na faktorový vstup hodnotu 1.*

Matematické pravidlo pre deriváciu súčinu dvoch (diferencovateľných) funkcií ukazuje na zaujímavý vzťah medzi deriváciou $f'(x)$, priemernou funkciou $\overline{f}(x) = f(x)/x$ $(x \neq 0)$ a ich elasticitami vzhľadom na x. Platí
Veta 3. Nech f(x) je diferencovateľná funkcia a nech $\overline{f}(x) := f(x)/x \ (x \neq 0)$ *je taktiež diferencovateľná jej priemerná funkcia.*

Potom platí rovnosť

$$f'(x) = \bar{f}(x).(1 + \varepsilon_{\bar{f},x}).$$

Dôkaz.

$$f(x) = x.\ \bar{f}(x) \Rightarrow f'(x) = 1.\ \bar{f}(x) + x.\ \bar{f}'(x) = \bar{f}(x).\left(1 + \frac{\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)}.x\right) = \bar{f}(x).\left(1 + \varepsilon_{\bar{f},x}\right)$$

Koniec dôkazu.

Pre každý monopolný podnik je dôležitá otázka, či určitý nárast ceny spôsobuje nárast obratu, alebo či cenový efekt sa vykompenzuje tak silným znížením množstva, že per saldo sa obrat zníži. Za predpokladu, že existuje klesajúca funkcia dopytu (odbytovej ceny), platia nasledujúce tvrdenia:

Tvrdenie 8. V cenovo neelastickej oblasti funkcie dopytu stúpa obrat pri zvyšovaní ceny (resp. klesá obrat pri znižovaní ceny).
Dôkaz. Medzi elasticitou produkcie vzhľadom na cenu $\varepsilon_{x,p}$ a elasticitou obratu vzhľadom na cenu $\varepsilon_{R,p}$ platí podľa vety 3 vzťah $\varepsilon_{R,p} = 1 + \varepsilon_{x,p}$. V cenovo neelastickej oblasti je elasticita $\varepsilon_{x,p} > -1 \Rightarrow 1 + \varepsilon_{x,p} > 0$ a preto je $\varepsilon_{R,p} > 0$. Koniec dôkazu.

Tvrdenie 9. V cenovo elastickej oblasti funkcie dopytu klesá obrat pri zvyšovaní ceny (resp. stúpa obrat pri znižovaní ceny).
Dôkaz. V cenovo elastickej oblasti je elasticita
$\varepsilon_{x,p} < -1 \Rightarrow 1 + \varepsilon_{x,p} < 0$ a preto je $\varepsilon_{R,p} < 0$. Koniec dôkazu.

Nasledujúci zákon opisuje klasickú súvislosť medzi hraničnými nákladmi a hraničným príjmom podniku s maximálnym ziskom.

Tvrdenie 10. Podnik (ktorý vyrába iba jeden produkt), môže dosiahnuť maximálny zisk len vtedy, ak jeho produkčné množstvo a odbytové množstvo (resp. jeho ponuková cena) sú tak nastavené, aby sa hraničný príjem rovnal hraničným nákladom.
Dôkaz. Predpokladá sa diferencovateľnosť funkcie nákladov a funkcie príjmu, ako aj existencia priesečníka krivky hraničného príjmu a hraničných nákladov, a to vnútri oblasti kapacity. Nevyhnutná podmienka pre maximum zisku pri výstupe x je, aby prvá derivácia funkcie $P(x)$ bola rovná nule. Potom je $P(x) = R(x) - C(x)$, t. j. $P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$. Z toho nasleduje $R'(x) = C'(x)$. Koniec dôkazu.

Poznámka 1. Či je v konkrétnom jednotlivom prípade skutočne maximum, treba preveriť postačujúcu podmienku $P''(x) < 0$, resp. $R''(x) < C''(x)$. To isté platí pre všetky nasledujúce tvrdenia, pri ktorých sa uvádzajú nevyhnutné podmienky extrému.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

Pre polypolný podnik existuje od množstva nezávislá cena produktu p = const. taká, že pre $R(x) = p.x$ platí $R\,'(x) = p$, t. j. hraničný príjem a cena sú rovnaké. Takto sa ako zvláštny prípad dostane tvrdenie

Tvrdenie 11. Polypolný, jeden produkt vyrábajúci podnik, môže dosiahnuť maximálny zisk len vtedy, keď vyrobí a predá také výstupné množstvo x, pre ktoré sú jeho hraničné náklady rovné (konštantnej) trhovej cene.
Predpokladá sa, že jeho funkcia nákladov nie je lineárna, pretože v tomto prípade sú hraničné náklady a hraničný príjem vždy rozdielne a tým sa posunie maximum zisku na hranicu kapacity.

Tvrdenie 12. Pri lineárnej funkcii nákladov a lineárnej funkcii dopytu leží maximum zisku vždy v strede zóny zisku.
Dôkaz. Pri určení zóny zisku treba nájsť dve hodnoty výstupu x_1 a x_2, pri ktorých sa krivka nákladov a krivka príjmov pretínajú, teda ktoré vyhovujú rovnici $P(x) = R(x) - C(x) = 0$. V tomto prípade ide o lineárne funkcie $p(x)$ a $C(x)$:

$$p(x) = a - bx; \qquad C(x) = c + dx; \qquad a, b, c, d > 0.$$

Funkcia príjmu má potom tvar $R(x) = x.p(x) = ax - bx^2$ a tým funkcia zisku má tvar

$$P(x) = R(x) - C(x) = ax - bx^2 - cx - dx = -bx^2 + (a - d)\,x - c.$$

Prahy zisku x_1 a x_2 sú reálne korene kvadratickej rovnice $P(x) = 0$:

$x_{1,2} = \dfrac{-(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4bc}}{-2b}$ a ich aritmetický stred je $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{a-d}{2b}$.

Na druhej strane je zisk maximalizujúci výstup x_P riešenie rovnice $P'\,(x) = 0$:

$P\,'(x) = -2bx + a - d = 0 \Rightarrow x_G = \dfrac{a-d}{2b} = \bar{x}$. Koniec dôkazu.

Monopolný podnik

Tvrdenie 13. Maximum zisku monopolného podniku, ktorý vyrába iba jeden druh tovaru, je vždy v cenovo elastickej oblasti dopytu (klesajúcej) cenovo odbytovej funkcie.
Dôkaz. Pre monopolný podnik, ktorý vyrába iba jeden druh tovaru, nech je daná monotónne klesajúca funkcia odbytovej ceny $p(x)$, resp $x(p)$ a monotónne rastúca funkcia celkových nákladov $C(x)$.
V maxime zisku musí nevyhnutne platiť $P\,'(x) = 0$, resp. $R\,'(x) = C\,'(x)$.
Ak sa dosadí posledný vzorec do Amorosovej–Robinsonovej relácie

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

$$R'(x) = p(x).\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{x,p}}\right)$$

dostane sa

$$C'(x) = p(x).\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{x,p}}\right).$$

Pretože $C'(x)$ a p sú kladné, musí byť aj výraz v zátvorke kladný. Z toho vyplýva

$$1 + \frac{1}{\varepsilon_{x,p}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{x,p}} > -1 \Leftrightarrow \varepsilon_{x,p} < -1$$

t. j. monopolný podnik dosiahne svoje maximum zisku vždy v elastickej oblasti funkcie dopytu.

Ak podnik nakupuje suroviny (faktory) na polypolnom trhu a vyrába z nich jeden výrobok a predáva ho na monopolnom trhu, platí preň

Tvrdenie 14. Pri dokonalej konkurencii na trhu faktorov dosahuje monopolný podnik maximálny zisk vtedy, ak nasadí také množstvá faktorov do výroby, pre ktoré je faktorová cena rovná hraničnému príjmu násobenému hraničnou produktivitou.
Dôkaz. Predpokladá sa, že produkčná funkcia $x = x(r)$ je diferencovateľná, faktorová cena p_r je konštantná (nakupuje sa v polypole) a odbytová cena má tvar $p = p(x) = p(x(r))$ (predáva sa v monopole). Faktorová funkcia nákladov $C(r)$ sa dostane ako súčin vstupnej hodnoty r a vstupnej ceny p_r, teda $C(r) := r.p_r$, zatiaľ čo príjem má tvar $R = R(x) = R(x(r)) = p(x(r)).\ x(r)$.
Funkcia zisku je $P(r) = R(x(r)) - r.p_r$ a jej prvá derivácia je $P'(r) = R'(x).x'(r) - p_r$ má byť v maxime zisku nulová. Z toho vyplýva $p_r = R'(x).x'(r)$. Koniec dôkazu.

Záver

Na základe troch viet sme odvodili štrnásť ekonomických tvrdení. Umožňuje to abstraktnosť matematiky. Diferencovateľná funkcia sa dá v ekonómii aplikovať raz ako cena, potom ako náklady, resp. príjem atď.

Na druhej strane treba určitú opatrnosť pri aplikácii. Ak sa napríklad predpokladá lokálny extrém danej funkcie v jej definičnom odbore, nemôže to byť funkcia, ktorá apriori nemá lokálny extrém. Napríklad lineárna funkcia. Preto sú aj tvrdenia o maxime zisku pri lineárnych nákladoch odlišné od analogických tvrdení pri nelineárnych, pri zvyšovaní produkcie sprvu degresívne a potom progresívne rastúcich nákladoch.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2009

Matematika je symbolická reč, v bežnej konverzácii veľmi nepohodlná. Pri jej používaní treba pero a papier a hlavne treba pri nej rozmýšľať. Našťastie sa dá „previazať" ľudskou rečou a tým aj aplikovať na konkrétne úlohy, ako sme ukázali, aj na ekonómiu. Matematika je veda nielen o kvantitatívnych vzťahoch, ale aj o štruktúre. Pri jej vhodnej aplikácii na ekonómiu sa ukáže aj štruktúra ekonomických vzťahov, čo nám môže pri ich iba slovnom dedukovaní uniknúť.

Literatúra

[1] FECENKO, J. – SAKÁLOVÁ, K.: *Matematika 2*. Bratislava: Elita 1999.

[2] TIETZE, J.: *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. 2. verbesserte Auflage.*Vieweg Braunschweig/Wiesbaden 1990

[3] KLŮFA, J. – CONFAL, J.: *Matematika pro ekonomy*. Praha: Ekopres 1997.

[4] BENKO, E. – HUŤKA, V. – MOJŽIŠOVÁ, E. – PELLER, F: *Matematika pre ekonómov 2.* Bratislava: Alfa 1986.″