Lea Škrovánková

AKTUÁRSKE VÝPOČTY V NEMOCENSKOM POISTENÍ

Abstract: *The purpose of this paper is to provide theoretical knowledge about sickness insurance, survey of transformation steps performed in the Slovak health insurance system, and to describe some problems related to sickness insurance in Slovakia. This paper proposes the procedure of premium calculation by means of suitable actuarial methods. The construction and using of differential equations are suitable methods for this case. The models and calculations for our insurance market are discussed at the end of the paper. It is in particular the last example proposed by the author that will be a suitable solution for the Slovak actuarial practice.*

Key words: *health and sickness insurance, actuarial model, benefit structure*

JEL: G 23

Úvod

Cieľom tohto príspevku je analýza niektorých problémov zdravotného a nemocenského poistenia a ilustrácia použiteľnosti aktuárskych metód na našom poistnom trhu. Venujeme sa najmä konštrukcii a využitiu diferenciálnych rovníc v nemocenskom poistení. Spojité časové modely, ktoré už boli na Slovensku vytvorené, umožňujú vo všeobecnosti zohľadňovať široký okruh rôznych podmienok pri tvorbe ponuky produktov nemocenského poistenia a zdravotnej starostlivosti. V tejto oblasti je potrebné pokračovať a rozšíriť ich.

V súčasnosti je spôsob zabezpečovania zdravotnej starostlivosti v Slovenskej republike v štádiu dokončovania veľkých zmien. Cieľom transformačných krokov je udržať a naďalej zvyšovať kvalitu a dostupnosť zdravotnej starostlivosti. Takýto stav možno dosiahnuť i zmenami vo financovaní zdravotníctva. V zdravotnom poistení, tak ako aj vo všetkých ostatných, je potrebné odhadnúť pravdepodobný priebeh škodovosti a na základe tohto odhadu stanoviť cenu poistenia. Jedným z použiteľných aparátov na určenie pravdepodobnej výšky výplat sú aktuárske metódy, ktorými sa budeme v príspevku zaoberať.

1 Súčasné problémy v zdravotníctve

Nahromadené problémy zdravotníctva nevyplývajú z jeho transformácie, ale z nedostatku peňazí. Aktuálnou sa stáva stratégia prežitia. Existujúce zdroje nepostačujú, služby nedosahujú požadovanú kvalitu, výsledky zdravotnej starostlivosti sú v porovnaní s ostatnými krajinami Európy zlé, vývoj zdravotného stavu obyvateľstva sa zhoršuje.

Riešenie môže byť celospoločenský systém zdravotnej starostlivosti založený predovšetkým na svetových skúsenostiach najmä Svetovej zdravotnej organizácie.

Základom programu tejto organizácie je:

– prisudzovať väčšiu prioritu prevencii ochorení,

– dosiahnuť, aby všetky odvetvia, ktorých činnosť súvisí so zdravotným stavom populácie, podnikli účinnejšie kroky na udržanie a upevnenie zdravia,

– klásť väčší dôraz na úlohu, ktorú pri rozvíjaní zdravia môžu mať jednotlivci, rodina,

– rozvinúť primárnu zdravotnú starostlivosť tak, aby sa stala jedným z hlavných prostriedkov na dosiahnutie pozitívnych zmien [7].

Vypracovanie tejto stratégie znamená hranicu vo vývoji zdravotníctva európskych štátov. Ešte nikdy predtým sa štáty Európy nedohodli na jednotnej zdravotnej politike ako spoločnom základe ďalšieho rozvoja, a to ani v jednotlivých členských štátoch, ani v rámci európskeho regiónu ako celku.

Vypracovanie a prijatie tejto stratégie znamená novú éru vývoja, pre ktorú je charakteristické, že štáty sa zaviazali podstatne zvýšiť svoje úsilie o zlepšovanie zdravia. Navyše, v duchu medzinárodnej solidarity si v rámci Svetovej zdravotnej organizácie budú vymieňať svoje skúsenosti a poznatky s inými štátmi.

Nemocenské poistenie je súčasťou sociálneho zabezpečenia. Jednotlivými jeho dávkami sa osobám zabezpečuje ušlý príjem v dôsledku choroby a materstva a čiastočne sa uhrádzajú zvýšené náklady z dôvodu starostlivosti o nezaopatrené deti alebo úmrtia v rodine [7].

Základnou podmienkou na priznanie a poskytovanie nemocenskej dávky je účasť na nemocenskom poistení alebo zachovanie nárokov po stanovené obdobie z dôvodov trvania ochrannej lehoty alebo z dôvodov poskytovania peňažných dávok nahrádzajúcich mzdu alebo príjem zo zárobkovej činnosti.

Osobitnú skupinu tvoria osoby, ktoré sa nezúčastňujú na nemocenskom poistení, ale majú zabezpečený nárok na dávky nemocenského poistenia priamo zákonom. Ide najmä o uchádzačov o zamestnanie, vojakov, študentov [7].

V nasledujúcom období je vzhľadom na predpokladané výrazné zmeny vo vývoji rozhodujúcich ekonomických ukazovateľov nevyhnutné pravidelne upravovať výšku jednotlivých dávok nemocenského poistenia i ďalšie dávky sociálneho zabezpečenia.

Takáto existujúca sústava dávok sa v budúcnosti zaslúži o riešenie konkrétnych štandardných i neštandardných situácií, v ktorých treba uplatniť sociálnu garanciu štátu.

2 Všeobecný model pre *n* stavov

V tejto kapitole chceme rozoberať konštrukciu a používanie diferenciálnych rovníc v nemocenskom a zdravotnom poistení. Spôsob použitia diferenciálnych

ISSN 0323-262X ISSUE 1, ČÍSLO 1/2009

rovníc v tejto oblasti je už dobre rozpracovaný v mnohých vyspelých krajinách a ich matematické modely sú publikované [5]. Preto sa nebudeme zaoberať ich opisom, čo by značne rozšírilo rozsah tohoto príspevku.

Vo všeobecnom modeli predpokladáme existenciu konečného počtu n možných stavov.

Nech $[S(x): 0 \leq x < \infty]$ je časový nehomogénny Markovov reťazec s konečným priestorom pre plynulý (spojitý) čas x, potom $S(x) = 1$ znamená, že majiteľ poistky je v stave (1) vo veku x. Platí:

$$S(x) \in \{1, 2, ..., n\}$$

Pravdepodobnosť prechodu z jedného stavu do iného stavu označíme:

$$_t p_x^{ij} = P\big[S(x+t) = j \mid S(x) = i\big], \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.1}$$

t. j. pravdepodobnosť toho, že v čase $x + t$ je poistený v stave (j) za podmienky, že v čase x bol v stave (i).

Tento stochastický proces je časovo nehomogénny, pretože predpokladáme, že $_t p_x^{ij}$ nezávisí len od času t, ale aj od spojitého času x (resp. veku) – začiatočného bodu časového intervalu a tiež od hodnôt i, j (podrobnejšie v [2]).

Ak $_t p_x^{ij}$ nezávisí od veličiny x, tak je proces časovo homogénny. Závislosť od oboch premenných x aj t je však požiadavka aktuárskych aplikácií (nemocenské aj zdravotné poistenie), kde pravdepodobnosti prechodov majú silnú vekovú závislosť. Jednotlivé pravdepodobnosti prechodov závisia od vstupného veku x aj od času t zotrvania v jednom stave.[1]

Tento stochastický proces môže byť opisovaný ako markovovský, ak predpokladáme, že hodnoty $_t p_x^{ij}$ nebudú ovplyvnené informáciami o stave procesu pred časom x, teda akýkoľvek priebeh procesu v ľubovoľnom budúcom čase $x + t$ závisí iba od stavu v súčasnosti a v budúcnosti, nie od toho, čo bolo pred časom x.

Poznámka. Stav (k) sa nazýva absorpčný, ak platí:

$$_t p_x^{ij} = 0 \tag{1.2}$$

$$\text{pre } \forall\ x, t \geq 0, j = 1, 2, \ldots, k{-}1.$$

Príkladom absorpčného stavu je *úmrtie.*

Zrejme platí:

$$\sum_{j=1}^{n} {}_t p_x^{ij} = 1 \tag{1.3}$$

$$\text{pre } \forall\ x, t \geq 0 \text{ a pevné } (i).$$

Ďalší pojem, ktorý budeme používať, je intenzita prechodu zo stavu (i) do stavu (j), ktorá je definovaná analogicky ako intenzita úmrtnosti (pozri [6]).

$$\mu_x^{ij} = \lim_{t \to 0^+} \frac{_t p_x^{ij}}{t} \quad \text{pre } i \neq j,\ x \geq 0 \tag{1.4}$$

1 Aktuárska definícia tohto pojmu sa nachádza v [4].

ISSN 0323-262X ISSUE 1, ČÍSLO 1/2009

Tieto zavedené pojmy si ilustrujme na najjednoduchšom viacstavovom modeli, ktorý je znázornený diagramom:

1. Živý → 2. Mŕtvy

V takomto prípade ${}_t p_x^{11}$ je pravdepodobnosť, že osoba, ktorá bola nažive vo veku x, je nažive aj vo veku $x + t$.[2] A ${}_t p_x^{12}$ je pravdepodobnosť, že osoba, ktorá bola nažive vo veku x, do veku $x + t$ zomrie (${}_t p_x^{12} = {}_t q_x$).
Zrejme platí: ${}_t p_x^{21} = 0$, keďže stav (2) je absorpčný ${}_t p_x^{11} + {}_t p_x^{12} = 1$ a podľa (1.3).

Ďalej uvedieme definíciu intenzity prechodu zo stavu (1) do stavu (2) podľa (1.4):

$$\mu_x^{12} = \lim_{t \to 0^+} \frac{{}_t p_x^{12}}{t}\,.$$

Po úprave dostávame:

$${}_t p_x^{12} = t \cdot \mu_x^{12} + o(t) \tag{1.5}$$

pre pevný vek x, kde $o(t)$ je funkcia, pre ktorú platí:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{o(t)}{t} = 0$$

tzv. funkcia rádu nula, t. j. $o(t)$ reprezentuje funkciu, ktorá sa blíži k nule rýchlejšie ako t. $o(t)$ vlastne vyjadruje pravdepodobnosť dvoch alebo viacerých prechodov medzi stavmi (1) a (2) v časovom intervale $\langle x, x+t \rangle$, ktorá je rádu nula [1].

3 Využitie diferenciálnych rovníc v poisťovníctve

Budeme uvažovať aktuársky model, ktorý obsahuje tieto stavy: (1) – zdravý, (2) – chorý, (3) – mŕtvy.
Pričom jednotlivé intenzity prechodu budú:

$\sigma_x = \mu_x^{12}$ – intenzita prechodu zo stavu (1) do stavu (2) – t. j. intenzita chorobnosti,
$\delta_x = \mu_x^{21}$ – intenzita prechodu zo stavu (2) do stavu (1) – t. j. intenzita návratnosti zo stavu chorých,
$\mu_x = \mu_x^{13}$ – intenzita prechodu zo stavu (1) do stavu (3) – t. j. intenzita úmrtnosti pre zdravých,
$\tau_x = \mu_x^{23}$ – intenzita prechodu zo stavu (2) do stavu (3) – t. j. intenzita úmrtnosti pre chorých.

---
[2] V klasických úmrtnostných tabuľkách sa používa označenie ${}_t p_x$, teda ${}_t p_x^{11} = {}_t p_x$.

Potom pre jednotlivé intenzity prechodu platí podľa (1.4):

$$\sigma_x = \lim_{t\to 0^+} \frac{{}_t p_x^{12}}{t}$$

$$\delta_x = \lim_{t\to 0^+} \frac{{}_t p_x^{21}}{t}$$

$$\mu_x = \lim_{t\to 0^+} \frac{{}_t p_x^{13}}{t}$$

$$\tau_x = \lim_{t\to 0^+} \frac{{}_t p_x^{23}}{t}$$

Pre jednotlivé pravdepodobnosti prechodu platí podľa (1.3):

$$\sum_{j=1}^{3} {}_t p_x^{ij} = 1 \tag{1.6}$$

pre fixné x, $t \geq 0$ a pevné i.

Ďalej budeme študovať konštrukcie diferenciálnych rovníc na výpočet pravdepodobností prechodu ${}_t p_x^{ij}$ pre i, j = 1, 2, 3.

Uvažujme ${}_t p_x^{11}$. Podľa (1.1) platí:

$${}_{t+dt} p_x^{11} = P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x) = 1\big]$$

Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti platí:

$$P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x) = 1\big] =$$

$$= \sum_k P\big[S(x+t+dt) = 1 \wedge S(x+t) = k \mid S(x) = 1\big] =$$

$$= \sum_k P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x+t) = k \wedge S(x) = 1\big] \cdot P\big[S(x+t) = k \mid S(x) = 1\big] =$$

$$= \sum_k P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x+t) = k\big] \cdot P\big[S(x+t) = k \mid S(x) = 1\big]$$

podľa vzťahu $P\big[A \cap B \mid C\big] = P\big[A \mid B \cap C\big] \cdot P\big[B \mid C\big]$ (pozri [3]).

Nech k = 1 alebo 2, potom dostávame:

$$P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x) = 1\big] =$$

$$= P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x+t) = 1\big] \cdot P\big[S(x+t) = 1 \mid S(x) = 1\big] +$$

$$+ P\big[S(x+t+dt) = 1 \mid S(x+t) = 2\big] \cdot P\big[S(x+t) = 2 \mid S(x) = 1\big]$$

pretože stav (3) je absorpčný.

Podľa (1.1) dostávame:

$$ {}_{t+dt}p_x^{11} = {}_tp_x^{11} \cdot {}_{dt}p_{x+t}^{11} + {}_tp_x^{12} \cdot {}_{dt}p_{x+t}^{21}. \tag{1.7} $$

V časovom intervale $\langle x+t,\ x+t+dt\rangle$ tiež platí vzťah (1.3), resp. (1.6)

$$ {}_{dt}p_{x+t}^{11} + {}_{dt}p_{x+t}^{12} + {}_{dt}p_{x+t}^{13} = 1 \qquad \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \qquad {}_{dt}p_{x+t}^{11} = 1 - {}_{dt}p_{x+t}^{12} - {}_{dt}p_{x+t}^{13} $$

a z definícií jednotlivých intenzít prechodu dostávame analogicky ako (1.5):

$$ {}_{dt}p_{x+t}^{12} = dt \cdot \sigma_{x+t} + o(dt), \tag{1.8} $$

$$ {}_{dt}p_{x+t}^{13} = dt \cdot \mu_{x+t} + o(dt), \tag{1.9} $$

$$ {}_{dt}p_{x+t}^{21} = dt \cdot \delta_{x+t} + o(dt). \tag{1.10} $$

Teda
$$ {}_{dt}p_{x+t}^{11} = 1 - (dt \cdot \sigma_{x+t} + o(dt)) - (dt \cdot \mu_{x+t} + o(dt)) = $$
$$ = 1 - dt \cdot (\sigma_{x+t} + \mu_{x+t}) + o(dt) $$

a tento vzťah spolu s (1.10) dosadíme do (1.7):

$$ {}_{t+dt}p_x^{11} = {}_tp_x^{11} \cdot \left[1 - dt \cdot (\sigma_{x+t} + \mu_{x+t})\right] + {}_tp_x^{12} \cdot \left[dt \cdot \delta_{x+t}\right] + o(dt), $$

po úprave dostávame

$$ \frac{{}_{t+dt}p_x^{11} - {}_tp_x^{11}}{dt} = -\,{}_tp_x^{11} \cdot (\sigma_{x+t} + \mu_{x+t}) + {}_tp_x^{12} \cdot \delta_{x+t} + \frac{o(dt)}{dt} $$

a limita pre $dt \to 0^+$:

$$ \lim_{dt \to 0^+} \frac{{}_{t+dt}p_x^{11} - {}_tp_x^{11}}{dt} = \lim_{dt \to 0^+} \left[-\,{}_tp_x^{11} \cdot (\sigma_{x+t} + \mu_{x+t}) + {}_tp_x^{12} \cdot \delta_{x+t} + \frac{o(dt)}{dt} \right]. $$

Výsledná diferenciálna rovnica pre ${}_tp_x^{11}$ má tvar:

$$ \frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{11} = -\,{}_tp_x^{11} \cdot (\sigma_{x+t} + \mu_{x+t}) + {}_tp_x^{12} \cdot \delta_{x+t}. \tag{1.11} $$

Analogicky sa odvodzujú diferenciálne rovnice pre pravdepodobnosti prechodu ${}_tp_x^{12}$, ${}_tp_x^{21}$ a ${}_tp_x^{22}$. Iná situácia nastáva pri odvodzovaní diferenciálnych rovníc pre pravdepodobnosti prechodu ${}_tp_x^{13}$ a ${}_tp_x^{23}$ vzhľadom na absorpčný stav (3). Odvodíme diferenciálnu rovnicu pre pravdepodobnosť prechodu ${}_tp_x^{13}$ a diferenciálna rovnica pre ${}_tp_x^{23}$ sa odvodzuje analogicky.

$$
\begin{aligned}
{}_{t+dt}p_x^{13} &= P\big[S(x+t+dt)=3 \mid S(x)=1\big]= \\
&= \sum_k P\big[S(x+t+dt)=3 \mid S(x+t)=k\big]\cdot P\big[S(x+t)=k \mid S(x)=1\big]= \\
&= P\big[S(x+t+dt)=3 \mid S(x+t)=1\big]\cdot P\big[S(x+t)=1 \mid S(x)=1\big]+ \\
&+ P\big[S(x+t+dt)=3 \mid S(x+t)=2\big]\cdot P\big[S(x+t)=2 \mid S(x)=1\big]+ \\
&+ P\big[S(x+t+dt)=3 \mid S(x+t)=3\big]\cdot P\big[S(x+t)=3 \mid S(x)=1\big]= \\
&= {}_{dt}p_{x+t}^{13}\cdot{}_tp_x^{11} + {}_{dt}p_{x+t}^{23}\cdot{}_tp_x^{12} + {}_{dt}p_{x+t}^{33}\cdot{}_tp_x^{13}
\end{aligned}
$$

a ${}_{dt}p_{x+t}^{33}=1$, pretože stav (3) je absorpčný.

Z definícií intenzít prechodu platí:

$$
\begin{aligned}
{}_{dt}p_{x+t}^{13} &= dt\cdot\mu_{x+t} + o(dt), \\
{}_{dt}p_{x+t}^{23} &= dt\cdot\tau_{x+t} + o(dt).
\end{aligned}
$$

Po úprave dostávame:

$$
{}_{t+dt}p_x^{13} = {}_tp_x^{13} + dt\cdot\mu_{x+t}\cdot{}_tp_x^{11} + dt\cdot\tau_{x+t}\cdot{}_tp_x^{12} + o(dt)
$$

$$\Downarrow$$

$$
\frac{{}_{t+dt}p_x^{13} - {}_tp_x^{13}}{dt} = {}_tp_x^{11}\cdot\mu_{x+t} + {}_tp_x^{12}\cdot\tau_{x+t} + \frac{o(dt)}{dt}.
$$

Opäť vypočítame limitu pre dt :

$$
\lim_{dt\to 0^+}\frac{{}_{t+dt}p_x^{13} - {}_tp_x^{13}}{dt} = \lim_{dt\to 0^+}\left[{}_tp_x^{11}\cdot\mu_{x+t} + {}_tp_x^{12}\cdot\tau_{x+t} + \frac{o(dt)}{dt}\right]
$$

teda:
$$
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{13} = {}_tp_x^{11}\cdot\mu_{x+t} + {}_tp_x^{12}\cdot\tau_{x+t}
$$

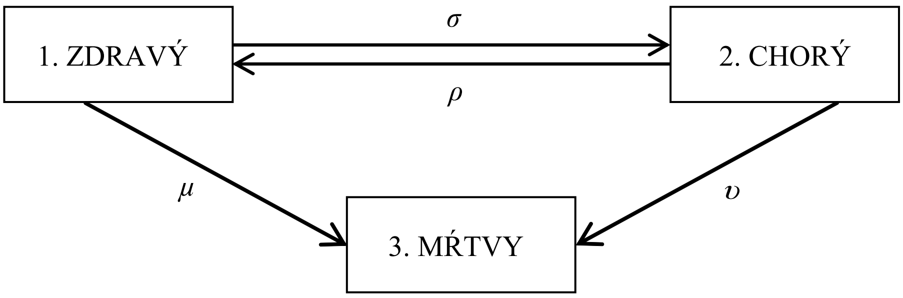
Podrobnejšie o riešení týchto diferenciálnych rovníc sa čitateľ môže dozvedieť v [6].

ISSN 0323-262X ISSUE 1, ČÍSLO 1/2009

4 Aktuárske modelovanie

V tejto časti ponúkame jednoduchý a moderný spôsob aplikácie aktuárskeho modelovania. Chceme ilustrovať využitie diferenciálnych rovníc pre všeobecné modelovanie produktov nemocenského poistenia. Takýto stochastický model so spojitým časovým parametrom dovoľuje zahrnúť širokú škálu rozličných poistných podmienok (nemocenské dávky a jednorazové sumy). Pokiaľ ide o nemocenské dávky, matematický aparát uvedený v tejto časti bude poskytovať model na vytvorenie analýz obchodného plánu a finančné modely cash flow (príklad 2).

Príklad 1
Daný je 3-stavový model s konštantnými intenzitami prechodu



pričom:
$\sigma_x = \sigma$ – intenzita prechodu zo stavu (1) do stavu (2),
$\rho_x = \rho$ – intenzita prechodu zo stavu (2) do stavu (1),
$\mu_x = \mu$ – intenzita prechodu zo stavu (1) do stavu (3),
$\upsilon_x = \upsilon$ – intenzita prechodu zo stavu (2) do stavu (3).

a) Nech pre pravdepodobnosť prechodu ${}_tp_x^{11}$ platí: ${}_tp_x^{11} = \exp\,[r \cdot t]$.
Potom platí:

$$r_i = \frac{1}{2}\left[-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4\rho\sigma}\right] \text{ pre } i = 1, 2,$$

pričom $\alpha = \mu + \sigma$, $\beta = \rho + \upsilon$.

b) $${}_tp_x^{11} = \frac{(r_2+\alpha)\cdot\exp[r_1\cdot t] - (r_1+\alpha)\cdot\exp[r_2\cdot t]}{r_2 - r_1},$$

$${}_tp_x^{12} = \frac{\sigma}{r_1 - r_2}\left[\exp(r_1\cdot t) - \exp(r_2\cdot t)\right]$$

pri splnení podmienok z a).

Dôkaz

a) Nech $\alpha = \mu + \upsilon$, potom diferenciálna rovnica (1.11) má tvar:

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x^{11} = -\alpha \cdot {}_t p_x^{11} + \rho \cdot {}_t p_x^{12} \tag{1.12}$$

Podobne pre $\beta = \rho + \upsilon$ by sme upravili nasledujúcu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x^{12} = -\beta \cdot {}_t p_x^{12} + \sigma \cdot {}_t p_x^{11} \tag{1.13}$$

Z diferenciálnej rovnice (1.12) vyjadríme ${}_t p_x^{12}$:

$${}_t p_x^{12} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}{}_t p_x^{11} + \alpha \cdot {}_t p_x^{11}\right] \tag{1.14}$$

Teraz vypočítame $\frac{d}{dt}{}_t p_x^{12}$ z vyjadrenia (1.14)

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x^{12} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d^2}{dt^2}{}_t p_x^{11} + \alpha \cdot \frac{d}{dt}{}_t p_x^{11}\right]$$

Táto derivácia sa musí rovnať (1.13), teda riešime rovnicu

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{d^2}{dt^2}{}_t p_x^{11} + \alpha \cdot \frac{d}{dt}{}_t p_x^{11}\right] = -\frac{\beta}{\rho}\left[\frac{d}{dt}{}_t p_x^{11} + \alpha \cdot {}_t p_x^{11}\right] + \sigma \cdot {}_t p_x^{11} \tag{1.15}$$

a vieme, že platí:

$${}_t p_x^{11} = \exp[r \cdot t],$$

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x^{11} = r \cdot \exp[r \cdot t],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}{}_t p_x^{11} = r^2 \cdot \exp[r \cdot t].$$

Toto riešenie spolu s prvou a druhou deriváciou dosadíme do (1.15):

$$\frac{1}{\rho}\left[r^2 + \alpha \cdot r\right] = -\beta \cdot \left[\frac{1}{\rho}(r + \alpha)\right] + \sigma.$$

Po úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$r^2 + (\alpha + \beta) \cdot r + \alpha \cdot \beta - \sigma \cdot \rho = 0.$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice dostávame:

$$r = -\frac{1}{2}\left[(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\sigma\rho}\right].$$

ISSN 0323-262X ISSUE 1, ČÍSLO 1/2009

b) Pri dôkaze vychádzame z diferenciálnej rovnice (1.12), do ktorej dosadíme:

$$ {}_t p_x^{11} = \frac{(r_2+\alpha)\cdot\exp[r_1\cdot t]-(r_1+\alpha)\cdot\exp[r_2\cdot t]}{r_2-r_1} \tag{1.16}$$

a

$$ {}_t p_x^{12} = \frac{\sigma\cdot[\exp(r_1\cdot t)-\exp(r_2\cdot t)]}{r_1-r_2}. \tag{1.17}$$

Upravená diferenciálna rovnica (1.12) má potom tvar:

$$-\alpha\cdot\frac{(r_2+\alpha)\cdot\exp[r_1\cdot t]-(r_1+\alpha)\cdot\exp[r_2\cdot t]}{r_2-r_1}+\frac{\sigma\cdot\rho}{r_1-r_2}[\exp(r_1\cdot t)-\exp(r_2\cdot t)]=$$

$$=\frac{d}{dt}{}_t p_x^{11} \tag{1.18}$$

a porovnáme koeficienty pri $\exp[r_1\cdot t]$ a $\exp[r_2\cdot t]$ v rovnici (1.18) a prvej derivácii $\frac{d}{dt}{}_t p_x^{11}$ zo vzťahu (1.16), čím ľahko nahliadneme, že (1.16) je platné riešenie.

Príklad 2

Uvažujme základnú PHI (Permanent Health Insurance) poistku, v ktorej je vybudovaný trojstavový model a jednotlivé stavy sú: (a) – poistený člen je zdravý, aktívny a platí príslušné poistné, (i) – poistený člen je chorý, dostáva príslušné nemocenské dávky a v tomto období neplatí poistné, (d) – označuje úmrtie. Na začiatku poistnej zmluvy, keď majiteľ poistky vo veku x je v stave (a), platí aktuársky vzťah:
očakávaná prítomná hodnota poistných príspevkov = očakávaná prítomná hodnota dávok pri úmrtí + očakávaná prítomná hodnota dávok v prípade ochorenia (nemocenské dávky).

Pre rok (t-1,t) uvažujeme:

P_t – ročné poistné platené na začiatku roka,
D_t – dávka pri úmrtí platená pozostalým na konci roka,
B_t - dávka v prípade ochorenia platená na konci roka.
Určíme výšku ročného poistného v tejto PHI poistke.

Riešenie

Očakávaná prítomná hodnota platených príspevkov bude podľa [5]

$$\sum_{t=1}^{n} P_t v^{t-1}{}_{t-1}p_x^{aa}$$

Očakávaná prítomná hodnota dávok pri úmrtí bude

$$\sum_{t=1}^{n} D_t v^t \left({}_{t-1}p_x^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{ad} + {}_{t-1}p_x^{ai} \cdot p_{x+t-1}^{id} \right),$$

pretože tieto dávky sú platené v čase t len vtedy, ak poistený člen zomrie v čase (t-1, t). Podľa (1.7) platí:

$${}_t p_x^{ad} = {}_{t-1}p_x^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{ad} + {}_{t-1}p_x^{ai} \cdot p_{x+t-1}^{id} + {}_{t-1}p_x^{ad} \cdot p_{x+t-1}^{dd}.$$

Keďže $p_{x+t-1}^{dd} = 1$, dostávame

$${}_t p_x^{ad} - {}_{t-1}p_x^{ad} = {}_{t-1}p_x^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{ad} + {}_{t-1}p_x^{ai} \cdot p_{x+t-1}^{id}.$$

Potom prítomná hodnota dávok pri úmrtí po úprave bude mať tvar

$$\sum_{t=1}^{n} D_t v^t \left({}_t p_x^{ad} - {}_{t-1}p_x^{ad} \right).$$

A nakoniec očakávaná prítomná hodnota dávok v prípade ochorenia je

$$\sum_{t=1}^{n} B_t v^t \, {}_t p_x^{ai}.$$

Výšku poistného môžeme dostať z rovnice ekvivalencie:

$$\sum_{t=1}^{n} P_t v^{t-1} \, {}_{t-1}p_x^{aa} = \sum_{t=1}^{n} D_t v^t \left({}_t p_x^{ad} - {}_{t-1}p_x^{ad} \right) + \sum_{t=1}^{n} B_t v^t \, {}_t p_x^{ai}.$$

Záver

V posledných rokoch je možné pozorovať narastajúci trend využitia rôznych matematických aparátov aktuármi vo všetkých vyspelých krajinách na svete. Týka sa to i zdravotného a nemocenského poistenia. Preto je nevyhnutné čo najskôr zaviesť podobné praktiky aj na Slovensku. Tento príspevok by mohol prispieť k skvalitneniu teoretického vybavenia slovenských aktuárov a pomôcť im orientovať sa v aktuárskych metódach, ktoré sú v mnohých vyspelých krajinách bežnou praxou.

Vzhľadom na to, že práca aktuárov je iná nielen v každej krajine, ale líši sa aj v rámci jednej krajiny, pri výpočtoch sme sa zamerali na hlavné črty aktuárskej praxe v krajinách Európskej únie. Stochastický prístup sa používa pri uvažovaní náhodných vplyvov na danú udalosť, čo je charakteristické pre udalosť *choroba.*

Význam nemocenského poistenia je nepopierateľný. V zložitých životných situáciách poskytuje náhradu príjmu, a tým zabezpečuje poistenému zachovanie si životného štandardu. Je najvýznamnejšou súčasťou sociálneho zabezpečenia. V budúcnosti by sa malo nemocenské poistenie viac diferencovať medzi štát a komerčné poisťovne. Tým by si poistení zabezpečili vyššie dávky, zároveň by sa znížili výdavky štátneho rozpočtu a následne by sa mohli znížiť aj odvody na nemocenské poistenie.

Literatúra

[1] BARKAR, S. – SIMONKA, Z. – ŠÁNER, V.: Spojité modely niektorých ekonomických procesov. In: *Ekonomické rozhľady č.1*, Bratislava, 1999.
[2] BILÍKOVÁ, M.: *Spojité metódy v poistnej matematike*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2003.
[3] LAMOŠ, F. – POTOCKÝ, R.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika.* Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998.
[4] NEILL, A.: *Life Contingencies.* Oxford: Butterworth-Heinemann, 1977.
[5] POTOCKÝ, R. – STEHLÍK, M.: Stochastic models in insurance and finance with respect to Basel II. In: *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics 2/2007.*
[6] RENSHAW, A. E. – HABERMAN, S.: On the Graduation Associated with a Multiple State Model for Permanent Health Insurance. In: *Actuarial Research Report No. 40*, London: City University, 1992.
[7] ŠKROVÁNKOVÁ, L.: *Aktuárske metódy v dôchodkovom a nemocenskom poistení.* Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2004.

ISSN 0323-262X ISSUE 1, ČÍSLO 1/2009